

学 号: B200423015

UDC: _____

厦 门 大 学

博 士 学 位 论 文

正则性理论的新方法及其在非线形偏微分方程组和拟凸积分中的应用

The New Method of Regularity Theory and
Applications to Nonlinear Partial Differential Systems
and Quasi-Convex Integrals

陈 淑 红

指导教师姓名: 谭 忠 教 授

专 业 名 称: 应 用 数 学

论文提交日期: 2007 年 4 月

论文答辩日期: 2007 年 5 月

学位授予日期: 2007 年 月

答辩委员会主席: _____

评 阅 人: _____

2007 年 4 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

责任人（签名）：

年 月 日

厦门大学博硕士论文摘要库

厦门大学博硕士论文摘要库

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年 月 日

厦门大学博硕士论文摘要库

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

- 1、保密（ ），在 年解密后适用本授权书。
- 2、不保密（ ）

（请在以上相应括号内打“√”）

作者签名：

日期： 年 月 日

导师签名：

日期： 年 月 日

厦门大学博硕士论文摘要库

目录

中文摘要	v
英文摘要	ix
第一章 前言	1
第二章 基础知识	10
§2.1 基本符号	10
§2.2 基本概念和空间	11
§2.3 基本不等式	12
第三章 正则性理论经典方法—凝固系数法	16
§3.1 结构性条件和主要结果	16
§3.2 反向的 Hölder 不等式	18
§3.3 Caccioppoli 不等式	20
§3.4 主要结果的证明	26
第四章 正则性理论新方法在非线形椭圆方程组中的应用	37
§4.1 非线性椭圆方程组弱解的最优部分正则性	37
§4.2 次二次增长的非线形椭圆方程组弱解的最优部分正则性	54
§4.3 推广	71
第五章 正则性理论新方法在拟凸积分中的应用	76
§5.1 拟凸积分极小的部分正则性	76
§5.2 次二次增长拟凸积分极小的部分正则性	91
§5.3 推广	108
第六章 正则性理论新方法在非线形抛物方程组中的应用	111
§6.1 非线性抛物方程组弱解的最优部分正则性	111
§6.2 推广	134
第七章 Navier-Stokes 方程组弱解的部分正则性	137
§7.1 稳态的 Navier-Stokes 方程组弱解的部分正则性	137
§7.2 Navier-Stokes 方程组的边界正则性	155

第八章	能量极小 p -调和映射的最优内部正则性	158
§8.1	结构性条件和主要结果	158
§8.2	p -调和逼近技巧及一些引理	159
§8.3	Caccioppoli 第二不等式	160
§8.4	主要结果的证明	161
第九章	参考文献	168
附录一	博士期间完成的论文的目录	180
附录二	结束语	182
致谢	183

Contents

Abstract(Chinese).....	v
Abstract(English)	ix
Chapter I Introduction	1
Chapter II Basic Knowledge	10
§2.1 Basic Notions	10
§2.2 Basic Concepts and Space	11
§2.3 Basic Inequalities	12
Chapter III The Classical Mothed Of Partial Regularity The- ory — The Method Of Freezing The Coefficients	16
§3.1 Structure Conditions And The Main Result	16
§3.2 Reverse Hölder-Type Inequality	18
§3.3 Caccioppoli Inequality	20
§3.4 The Proof of The Main Result	26
Chapter IV The Applications Of New Method Of Regularity Theory To Nonlinear Elliptic Systems	37
§4.1 Optimal Partial Regularity For Weak Solutions Of Non- linear Elliptic Systems	37
§4.2 Optimal Partial Regularity For Weak Solutions Of Non- linear Elliptic Systems With Subquadratic Growth ...	54
§4.3 Extend	71
Chapter V The Applications Of New Method Of Regularity Theory To Quasi-Convex Integrals	76
§5.1 Regularity Of Almost Minimizers Of Quasi-convex Inte-	

	grals	76
§5.2	Regularity Of Almost Minimizers Of Quasi-convex Integrals With Subquadratic Growth	91
§5.3	Extend	108
Chapter VI	The Applications Of New Method Of Regularity Theory Applied To Nonlinear Parabolic Systems	111
§6.1	Optimal Partial Regularity For Weak Solutions Of Nonlinear Parabolic Systems	111
§6.2	Extend	134
Chapter VII	Partial Regularity For Weak Solutions Of Navier-Stokes Systems.....	137
§7.1	Partial Regularity For Weak Solutions Of Stationary Navier-Stokes Systems	137
§7.2	Boundary Regularity For Navier-Stokes Systems	155
Chapter VIII	Optimal Interior Partial Regularity For Energy Minimizing p -harmonic Maps	158
§8.1	The Main Result and Structure Conditions	158
§8.2	The p -harmonic approximation technique and preliminaries	159
§8.3	Caccioppoli Second Inequality	160
§8.4	Proof Of The Main Result	161
Chapter IX	References	168
Appendix I	Publications And Preprints During Doctor Study	180
Appendix II	Conclusion	182
	Acknowledgements	183

摘 要

弱解的正则性理论是近代偏微分方程领域极具挑战性从而倍受关注的热点问题之一, 其研究历史悠久。早在 1900 年在巴黎召开的国际数学家大会上, D. Hilbert 提出的著名的 23 个公开问题中就有两个 (问题第 19 和第 20 个) 是对解的正则性的叙述, 凸现了正则性理论研究的难度与重要意义。

部分正则性研究的经典方法是“凝固系数法”, 即: 通过“凝固系数”得到常系数方程组, 再把解跟由“凝固系数”后得到的常系数方程组所构成的 Dirichlet 问题的解进行比较, 得到重要的衰减 (Decay) 估计 (也称单调性不等式) 并进行常规的迭代, 从而推出部分正则性结果。其中需要用到复杂而繁琐的反 Hölder 不等式或 Gehring 引理, 更令人感到遗憾的是由此所得到的部分正则性不是最优的, 即: Hölder 正则性指标低于已知系数函数的 Hölder 连续性条件中的指标, 且奇异集大小的估计不够精确。

因此, 本文采用部分正则性研究的新方法—A-调和逼近方法, 来研究具有可控增长条件和自然增长条件的非线性偏微分方程组弱解的部分正则性。这种新方法是通过对 A-调和逼近引理架起 A-调和函数和非线性偏微分方程组之间的桥梁, 使得我们能够根据文章的实际需要构造某个跟弱解 u 相关的特定函数, 通过 A-调和逼近引理, 揭示了存在这样的 A-调和函数在 L^2 意义下跟该特定函数靠得非常近, 从而可以利用 A-调和函数那些好的性质, 推出需要的衰减 (Decay) 估计, 由此得到部分正则性结果。

“A-调和逼近方法”和经典的“凝固系数法”关键的差别是: 解是与在 L^2 意义下跟我们构造的特定函数充分靠近的 A-调和函数进行比较, 而不是跟由“凝固系数”后得到的常系数方程组所构成的 Dirichlet 问题的解进行比较的。这种新方法不但大大简化了证明过程, 更重要的是得到了最优部分正则性结果。

本文的主要创新点是 (文中 m 表示的是弱解 u 的梯度 Du 的增长指标):

(1) 对具有自然增长条件的偏微分方程组, 由于弱解 u 的有界性, 即, $|u| \leq M < \infty$, 使得它的处理方法比具有可控增长条件的情形简单多了, 但我们所得到的在自然增长条件下弱解的奇异集大小比前人所得到的要精确得多。

(2) 据我们所了解, 在可控增长条件下非线性偏微分方程组弱解的部分正则性此前并没有好的结果, 甚至连 $m \equiv 2$ 时的 Caccioppoli 第二不等式都没有人证明过, 更不用说 $m > 2$ 或 $1 < m < 2$ 的情形了。这里我们采用了一个新的办法得到了 Caccioppoli 第二不等式。因此, 即使是在可控增长条件下的 Caccioppoli 第二不等式的证明, 也是崭新的、具有独立兴趣的结果。

(3) 本文不但成功地处理了当 $m > 2$ 时非线性椭圆方程组弱解的最优部分正则性问题, 而且对 $1 < m < 2$ 的情形也圆满地解决了。可以肯定地说, 这个结果是近二十多年来具有一般结构的椭圆方程组部分正则性理论的一个突破性进展。

(4) 成功结合研究非线性椭圆方程组弱解部分正则性的技巧, 得到了一般形式的拟凸积分极小的最优部分正则性。

总之, 本文应用 A-调和逼近技巧以及它的各种变化形式, 结合不同的技巧, 分别解决了具有可控增长条件和自然增长条件的非线性椭圆方程组、非线性抛物方程组、退缩椭圆方程组、稳态的 Navier-Stokes 方程组的弱解以及拟凸积分极小的部分正则性。具体如下:

1、非线性椭圆方程组

当 $m > 2$ 时, 本文采用 A-调和逼近方法得到了弱解的最优部分正则性结果。但是, 由于 A-调和逼近技巧只能够处理 $m \equiv 2$ 的情形, 而对 $m \neq 2$ 的情况束手无策, 本文通过插值技巧解决了这个问题。

当 $1 < m < 2$ 时, 上述的 A-调和逼近方法已经不再适用, 庆幸的是另外一种类似于 p-Laplace 形式的 A-调和逼近方法使得我们可以继续对这类非线性椭圆方程组弱解的部分正则性问题进行探讨。然而此刻却出现了积分函数的指数 $-\frac{1}{2} < \frac{m-2}{2} < 0$ 是负数的情形, 这使得我们原先的技巧失效了。为了克服这个困难, 我们借鉴了 1989 年 Acerbi 和 Fusco 处理变分泛函极小的方法, 推出相应的积分不等式, 终于扫除了这道障碍。

这部分我们再次证明了在可控增长条件下的 Caccioppoli 第二不等式, 并得到了这种情形的最优部分正则性结果。

2、退缩椭圆方程组

本部分特别将 A -调和逼近技巧改进为 p -调和逼近方法来研究退缩椭圆方程组弱解的最优部分正则性问题。然而, 由于可控增长条件本身的特点和弱解 u 没有有界性条件, 使得对该方程组的最优部分正则性研究困难重重。为了克服这道难关, 我们在谭忠和严子谦于 1992 年处理退缩椭圆方程组和障碍问题的论文的启发下, 结合 p -调和逼近技巧和 Sobolev 空间的性质, 推出了适当形式的 Caccioppoli 不等式, 从而得到一个颇具特色的衰减 (Decay) 估计, 使得退缩椭圆方程组弱解的最优部分正则性问题迎刃而解。

3、非线性抛物方程组

本部分应用的是在 A -调和逼近方法的基础上发展起来的 A -热调和逼近方法。由于这里的弱解 u 不但跟时间 t 有关而且没有有界性条件, 再加上缺乏相应的 Caccioppoli 第二不等式, 使得我们的研究举步为艰。最终, 我们在严子谦于 1986 年处理非线性抛物方程组的启示下, 充分挖掘可控增长条件那些好的性质, 结合 A -热调和逼近技巧和解决非线性椭圆方程组的技巧, 终于排除困境, 得到了具有可控增长条件的非线性抛物方程组弱解的最优部分正则性结果。

4、稳态的 Navier-Stokes 方程组

对于简单形式的稳态的 Navier-Stokes 方程组的部分正则性以及奇异集的大小估计已有较好的结果, 但对具有一般结构的稳态的 Navier-Stokes 方程组, 自 1979 年 Giaquinta 的工作之后就没有好的结果, 我们通过 A -调和逼近技巧, 结合以往处理该方程组的方法, 同时注意到弱解的散度和梯度之间的关系, 终于改进了 Giaquinta 的结果, 得到了该方程组的最优部分正则性。

5、拟凸积分极小

跟 x, u 无关且泛函的积分函数 $f(Du)$ 的增长指标 $m > 2$ 的拟凸积分极小, 我们采用 A -调和逼近方法, 充分应用拟凸积分极小本身的特点, 并结合 A -调和逼近技巧和插值技巧得到所需的最优部分正则性结果。

跟 x, u 有关且泛函的积分函数 $f(x, u, Du)$ 的增长指标 $1 < m < 2$ 的拟凸积分极小, 借鉴对非线性椭圆方程组当中对 x, u 的处理技巧, 结合拟凸积分极小本身的特点和 A -调和逼近技巧以及反-Hölder 不等式推出所要的结果。

关键词: 椭圆方程组; 抛物方程组; 拟凸积分极小; 自然增长条件; 可控增长条件; 部分正则性; A -调和逼近; \mathcal{A} -调和逼近; A -热调和逼近; p -调和逼近。

厦门大学博硕士论文摘要库

Degree papers are in the “[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)”. Full texts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to etd@xmu.edu.cn for delivery details.

厦门大学博硕士论文摘要库